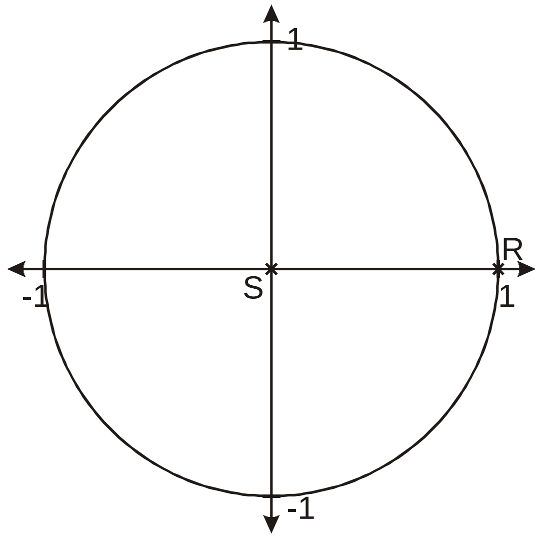
4.2.7 Zavedení funkcí sinus a cosinus pro orientovaný úhel I

Předpoklady: 4201, 4203, 4204, 4206

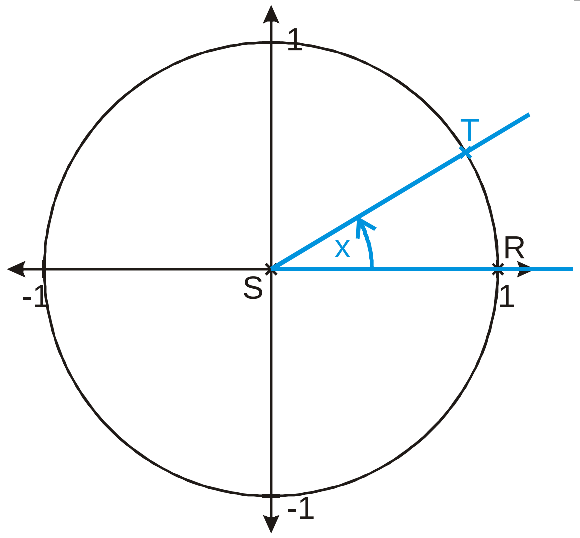
Problém s definicí funkcí $\sin(x)$ **a** $\cos(x)$**:** Definice pomocí pravoúhlého trojúhelníku je možné použít pouze pro $x \in (0°;90°)$ (v obloukové míře $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$) $\Rightarrow$ potřebujeme jinou definici, která musí splnit tyto požadavky:

- Umožní určit hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro $x \in R$.
- Pro $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ definice zaručí stejné hodnoty funkcí jako definice pomocí pravoúhlého trojúhelníka.
- Protože jde o funkci úhlu a praktická realizace úhlu se opakuje po 2π, měly by se hodnoty nadefinovaných funkcí také opakovat s touto nejmenší periodou.

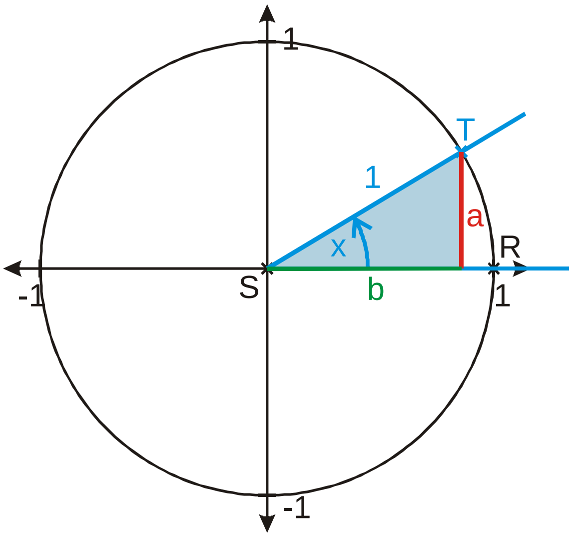
Pro novou definici použijeme jednotkovou kružnici (kružnice o poloměru 1).



Do kružnice nakreslíme úhel o velikosti *x*, s počátečním ramenem *SR*.



Př. 1: Nakresli do obrázku pravoúhlý trojúhelník a pomocí jeho stran urči hodnoty funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro úhel x.



Strana ST je poloměrem kružnice a proto platí $|ST| = 1$.

Vypočteme hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$ podle staré definice:

$$\sin(x) = \frac{protilehlá}{přepona} = \frac{a}{1} = a \qquad \cos(x) = \frac{přilehlá}{přepona} = \frac{b}{1} = b$$

Už je jasné, proč jsme použili jednotkovou kružnici: Nemusíme počítat poměry, stačí změřit odvěsny trojúhelníka a získáme hledané hodnoty.

Dokážeme nakreslit obrázek i pro úhly větší než $\frac{\pi}{2}$?

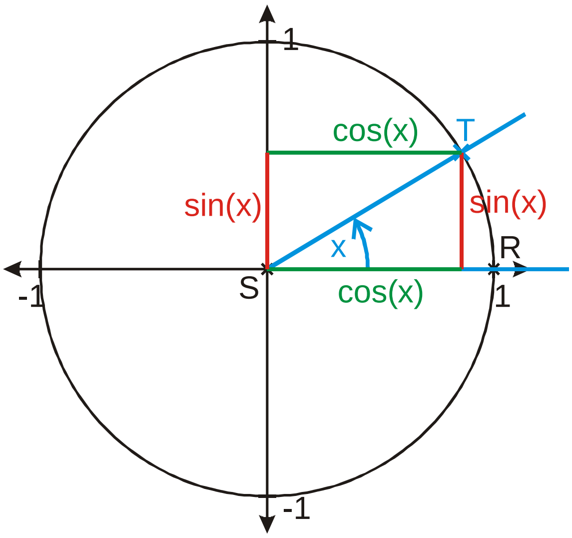
Snadno, ale v obrázku už nebudeme mít trojúhelník s úhlem x.

Je možné interpretovat úseky *a* a *b* jinak než jako délky odvěsen v trojúhelníku?
Ano, úsečky můžeme interpretovat také jako souřadnice bodu *T*. Bod *T* bude mít souřadnice i pro úhly $x \geq \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ pokud budeme funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ interpretovat jako souřadnice bodu *T*, budeme schopni určit hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$ i pro $x \geq \frac{\pi}{2}$.

Hodnotou funkce $\sin(x)$ rozumíme *y*-vou souřadnici bodu *T* na našem náčrtku.

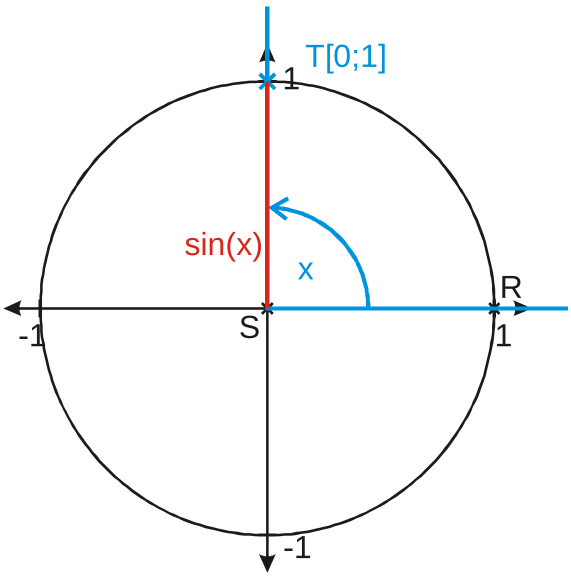
Hodnotou funkce $\cos(x)$ rozumíme *x*-vou souřadnici bodu *T* na našem náčrtku.

Tato definice vyhovuje všem třem požadavkům z úvodu hodiny.

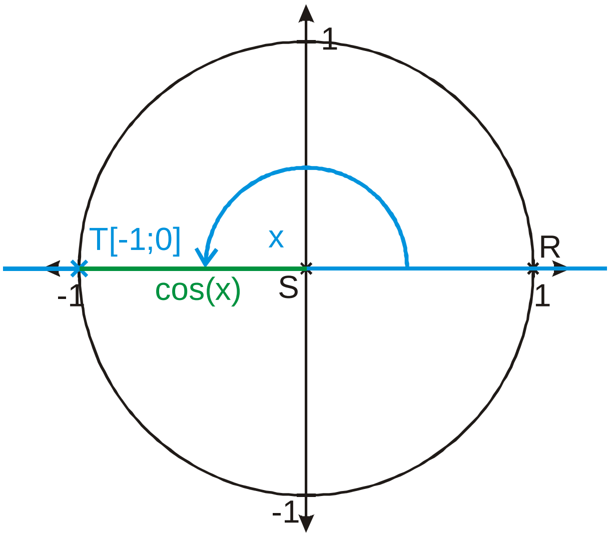


Př. 2: Urči pomocí jednotkové kružnice hodnoty funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro úhly:

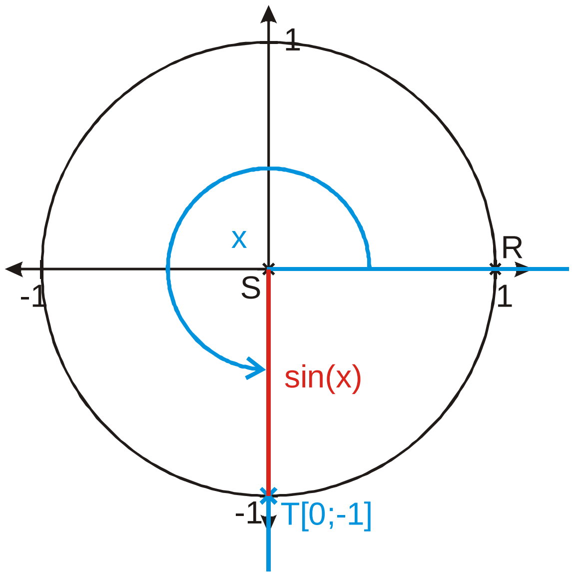
a) $x=\frac{\pi}{2}$ b) $x=\pi$ c) $x=\frac{3}{2}\pi$ d) $x=2\pi$.



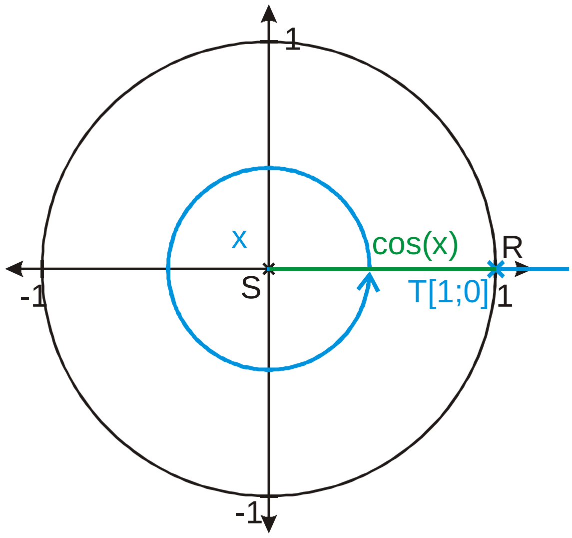
$\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$



$\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$



$\sin\frac{3}{2}\pi = -1$, $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$

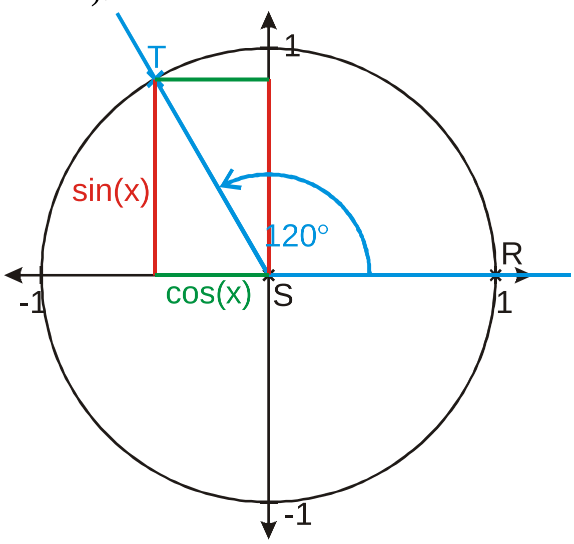


$\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$

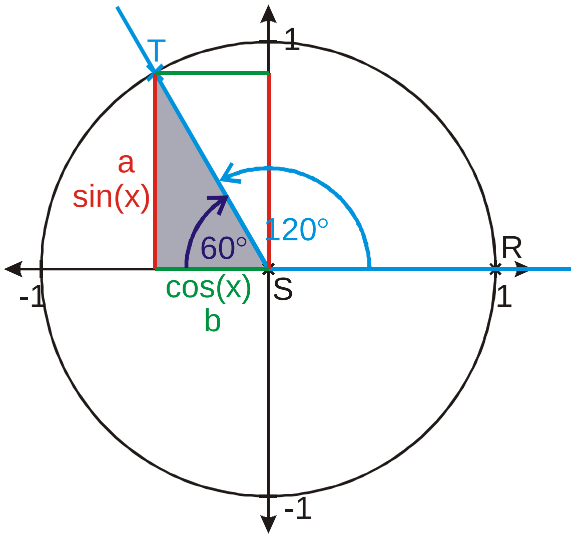
Jak určit hodnoty pro úhly různé od násobků $\frac{\pi}{2}$?

Př. 3: Urči hodnoty funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro $x = 120°$.

Nakreslíme si obrázek do jednotkové kružnice a vyznačíme $\sin(x)$ a $\cos(x)$ (souřadnice bodu *T*):



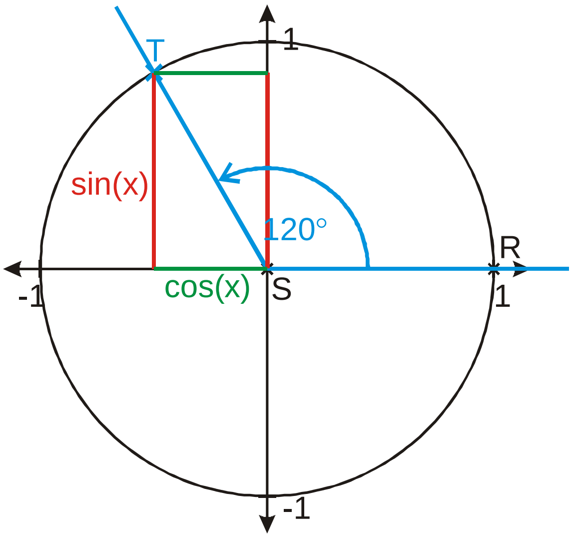
Najdeme v obrázku pravoúhlý trojúhelník se známým úhlem a z něj dopočteme délky odvěsen (hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$).



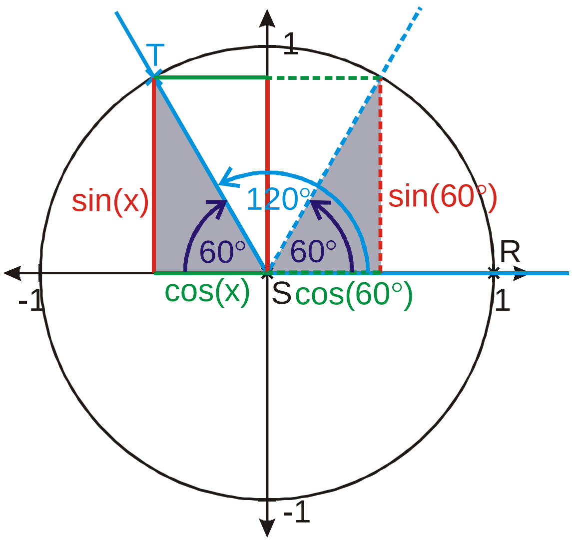
Souřadnice bodu T můžeme určit pomocí odvěsen v tmavomodrém trojúhelníku.

- $\frac{a}{1} = \sin 60° \Rightarrow a = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
  $\sin 120°$ je kladný a jeho velikost se rovná $a \Rightarrow \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\frac{b}{1} = \cos 60° \Rightarrow b = \cos 60° = \frac{1}{2}$
  $\cos 120°$ je záporný (je nalevo od počátku) a jeho velikost se rovná $b \Rightarrow$ $\cos 120° = -\frac{1}{2}$.

Hodnoty goniometrických funkcí můžeme určit i jinak.
Nakreslíme si obrázek do jednotkové kružnice a vyznačíme $\sin(x)$ a $\cos(x)$:



Najdeme v obrázku pravoúhlý trojúhelník se známým úhlem, jehož odvěsny tvoří souřadnice bodu T. K tomuto trojúhelníku najdeme podobný trojúhelník v prvním kvadrantu.

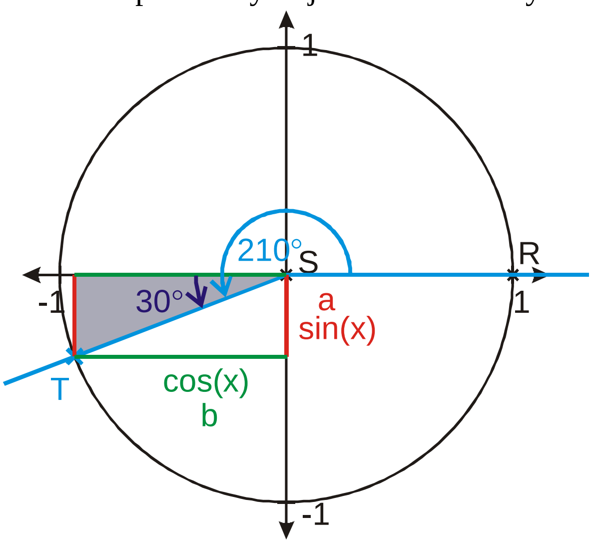


Z obrázku je (kvůli shodnosti obou vybarvených trojúhelníků) vidět, že platí:

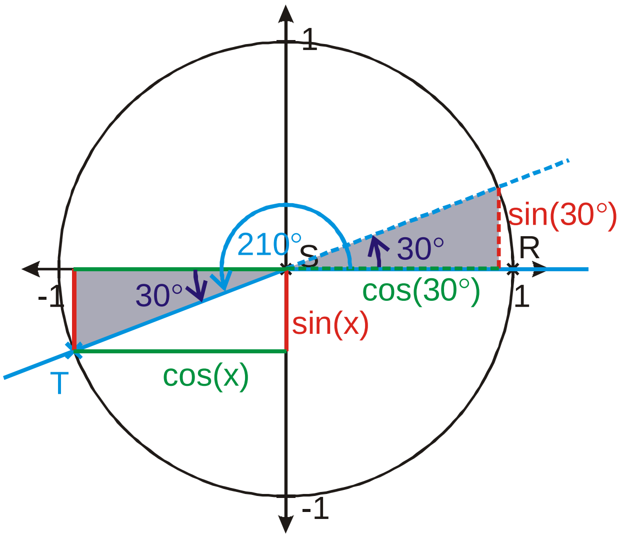
- $\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$ ($\cos 120°$ je orientován na druhou stranu).

Př. 4: Urči hodnoty funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro $x = 210°$.

Nakreslíme si obrázek do jednotkové kružnice a vyznačíme $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Najdeme v obrázku pravoúhlý trojúhelník se známým úhlem, jehož odvěsny tvoří souřadnice bodu *T*.



Najdeme podobný trojúhelník v prvním kvadrantu.

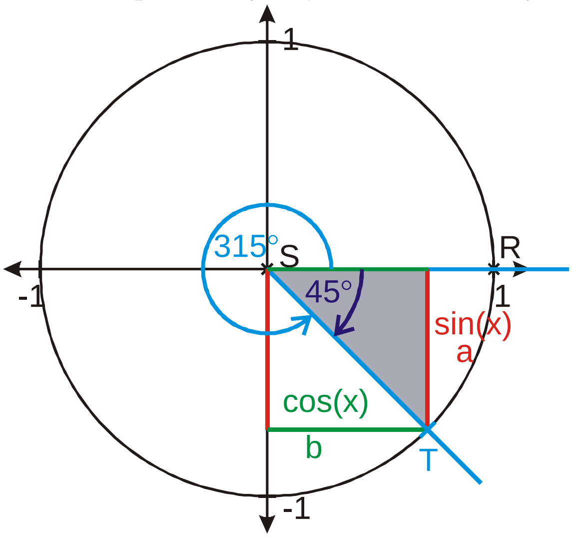


Z obrázku je (kvůli shodnosti obou vybarvených trojúhelníků) vidět, že platí:

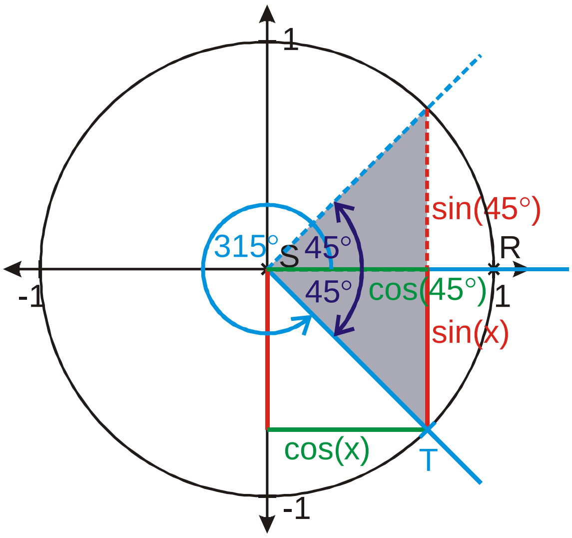
- $\sin 210° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$,
- $\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Př. 5: Urči hodnoty funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro úhel $315°$.

Nakreslíme si obrázek do jednotkové kružnice a vyznačíme $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Najdeme v obrázku pravoúhlý trojúhelník se známým úhlem, jehož odvěsny tvoří souřadnice bodu *T*.



Najdeme podobný trojúhelník v prvním kvadrantu.



Z obrázku je (kvůli shodnosti obou vybarvených trojúhelníků) vidět, že platí:

- $\sin 315° = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,
- $\cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Shrnutí: $\sin(x)$ zavádíme jako *y*-ovou souřadnici bodu, který vznikne na jednotkové kružnici jako průsečík s koncovým ramenem orientovaného úhlu.